свертывания некоторых тензоров. Матер. итоговой научн. конф. матем. и мех. за 1970 год I. Изд-во Томского ун-та, 1970, 121-123.

7. Норден А.П., Обобщение основной теоремы теории нормализации. Изв. высш. уч. зав. "Математика", 1966, №2 (55), 9-19.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

К и м В.Б.

ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ, ЭЛЕМЕНТ КОТОРОГО СОСТОИТ ИЗ КУБИКИ И ТОЧКИ.

В работе изучается трехпараметрическое многообразие, элемент которого состоит из плоской кривой третьего порядка (кубики) и точки в P_3. С помощью компонент основного фундаментального объекта строятся некоторые геометрические объекты и изучаются проективно инвариантные геометрические образы, определяемые этими объектами. Эти геометрические образы позволяют получить некоторые частные классы рассматриваемых многообразий.

§1. Включение элемента в репер.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается многообразие $K(0,3,3)^3$ -трехпараметрическое многообразие, элемент которого состоит из кубики K_3 и точки M, не лежащей в плоскости кубики, причем плоскости кубики образуют трехпараметрическое семейство.

Пространство P_3 относится к проективному реперу $R=\{A_0 A_1 A_2 A_3\}$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta . \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 . \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем индексы α, β, γ принимают значения 0,1,2,3,а индексы i, j, k, p, r —значения 1, 2, 3.Поместим вершину A_0 репера в точку M ,а вершины A_i -в плоскость кубики так,чтобы точка A_1 не лежала на K_3 . Тогда уравнения кубики запишутся в виде

$$a_{ijk} x^i x^j x^k = 0 , \quad x^0 = 0 , \tag{1.4}$$

где $a_{111} = 1$.

Обозначая

$$\omega_i = \omega_i^0 , \tag{1.5}$$

запишем замкнутую систему дифференциальных уравнений многообразия $K(0,3,3)^3$ в виде:

$$\Delta b_{ijk}^p \wedge \omega_p = 0 , \quad \Delta c^{ip} \wedge \omega_p = 0 \tag{1.6}$$

Здесь

$$\Delta a_{ijk} = da_{ijk} - a_{pjk}\omega_i^p - a_{ipk}\omega_j^p - a_{ijp}\omega_k^p + 3a_{ijk}a_{11p}\omega_1^p ,$$

$$\Delta b_{ijk}^p = d b_{ijk}^p - b_{ijk}^p \omega_0^0 + b_{ijk}^r \omega_r^p - b_{rjk}^p \omega_i^r - b_{irk}^p \omega_j^r -$$

$$b_{ijr}^p \omega_k^r + 3(a_{ijk} b_{11r}^p + a_{11r} b_{ijk}^p)\omega_1^r + c^{rp}(a_{rjk}\omega_i + a_{irk}\omega_j +$$

$$+ a_{ijr}\omega_k - 3a_{ijk}a_{11r}\omega_1) , \tag{1.7}$$

$$\Delta c^{ip} = dc^{ip} - 2c^{ip}\omega_0^0 + c^{kp}\omega_k^i + c^{ik}\omega_k^p ,$$

Разрешив систему (1.6) по лемме Картана,будем иметь

$$\Delta b_{ijk}^p = b_{ijk}^{pr}\omega_r , \quad \Delta c^{ip} = c^{ipr}\omega_r . \tag{1.8}$$

Здесь величины b_{ijk}^{pr} , c^{ipr} симметричны по индексам p, r . Система величин $\Gamma_1 = \{a_{ijk}, b_{ijk}^p, c^{ip}\}$ образует основной геометрический объект [3] многообразия $K(0,3,3)^3$, а система величин $\Gamma_2 = \{a_{ijk}, b_{ijk}^p, c^{ip}, b_{ijk}^{pr}, c^{ipr}\}$-продолженный внутренний фундаментальный объект .Задание компонент объекта Γ_2 определяет многообразие $K(0,3,3)^3$ с точностью до постоянных.

§2. Некоторые геометрические образы,ассоциированные с многообразием $K(0,3,3)^3$.

Рассмотрим систему величин c^{ij} .Из уравнений (1.7) следует,что эти величины образуют дважды контравариантный тензор.Обозначим $c = \det \| c^{ij} \|$.С помощью уравнений (1.7) получим

$$dc - 8c\omega_0^0 = c^i \omega_i , \tag{2.1}$$

где выражения C^i для нас несущественны. Следовательно, величина C является относительным инвариантом. Исключи[м] из рассмотрения случай $C=0$, т.е. будем считать тензор C^{ij} невырожденным. С помощью величин C^{ij} и a_{ijk} определим следующие тензоры

$$b^{ij}=\frac{1}{2}(c^{ij}+c^{ji}), \tag{2.2}$$

$$a^{ij}=\frac{1}{2}(c^{ij}-c^{ji}), \tag{2.3}$$

$$a_k=a_{ijk}\,b^{ij}, \tag{2.4}$$

$$a^i=b^{ij}a_j, \tag{2.5}$$

$$b_{ij}\,b^{jk}=b\,\delta_i^k, \quad b=\det\|b^{ij}\|. \tag{2.6}$$

Тензоры b^{ij}, b_{ij} -симметричны, а тензор a^{ij} -кососимметричен.

Установим соответствие между прямыми и точками плоскости кубики с одной стороны, и множествами Ψ_1 и Ψ_2 [4] - с другой стороны, следующим образом. Каждой прямой ℓ

$$x_i x^i=0, \quad x^0=0, \tag{2.7}$$

соответствует Ψ_1, определяемое уравнениями

$$\omega_i=x_i\theta, \quad \Delta\theta=0. \tag{2.8}$$

Здесь x_i -некоторые функции главных и вторичных параметров, удовлетворяющие при фиксированных параметрах уравнениям

$$\delta x_i=x_j\pi_i^j$$

Геометрически это соответствие означает, что прямая (2.7) является характеристикой плоскости кубики вдоль Ψ_1.

Каждой точке $X=x^iA_i$ сопоставим Ψ_2:

$$x^i\omega_i=0, \tag{2.9}$$

причем функции x^i должны удовлетворять условию относительной инвариантности [4]. Это Ψ_2 представляет собой совокупность таких Ψ_1, что вдоль каждого из них точка X описывает кривую с касательной, принадлежащей плоскости кубики.

Тензор

$$c^{ij}=a^{ij}+b^{ij} \tag{2.10}$$

порождает два соответствия между точками и прямыми плоскости кубики: левое и правое, которые аналитически выражаются следующим образом

$$x^i=c^{ji}x_j, \tag{2.11}$$

$$x^i=c^{ij}x_j. \tag{2.12}$$

В правом соответствии (2.12) каждой прямой ℓ в плоскости кубики соответствует точка R этой же плоскости, являющаяся точкой пересечения с плоскостью кубики касательной к кривой, описываемой точкой A_0 вдоль Ψ_1, соответствующего этой прямой. Совокупность прямых ℓ, проходящих через соответствующие точки R, образует кривую второго класса K^2

$$b^{ij}x_ix_j=0, \quad x^0=0, \tag{2.13}$$

огибающую конику K_2:

$$b_{ij}x^ix^j=0,\ x^0=0 \quad (2.$$

Левое соответствие (2.II) характеризуется следующим образом. Через прямую $\ell\in A_1A_2A_3$ и точку A_0 проведе плоскость Π и найдем такое Ψ_2, что плоскость, содер щая все касательные к линиям, описываемым точкой A_0 вдо всех $\Psi_1\in\Psi_2$, будет совпадать с плоскостью Π. Как было новлено выше, этому Ψ_2 будет соответствовать точка L в кости кубики, которая и является образом прямой ℓ в ле соответствии.

Таким образом, каждой прямой ℓ отвечают две точки (правая) и L (левая), определяемые уравнениями (2.12) и (2.II). Полюсом прямой ℓ относительно коники K_2 являет ся точка $P=p^iA_i$, где

$$p^i=b^{ij}x_j.$$

Нетрудно показать, что для каждой прямой ℓ точки R, L и лежат на одной прямой, причем для аналитических точек име место равенство

$$P=\frac{1}{2}(R+L)$$

Четвертой гармонической к точкам R, L, P будет точка

$$Q=\frac{1}{2}R-\frac{1}{2}L=q^iA_i, \quad (2.15)$$

где

$$q^i=a^{ij}x_j.$$

овем точку Q гармоническим полюсом прямой ℓ.

Пусть $u\equiv u_ix^i=0$ и $v\equiv v_ix^i=0$ — две прямые в оскости $A_1A_2A_3$. В общем случае точка пересечения их прямых не является гармоническим полюсом для каждой ямой. Геометрическое место точек, каждая из которых является одновременно точкой пересечения двух прямых и их гармоническим полюсом, определяется уравнением

$$a^{ij}u_iv_j=0,\ x^0=0 \quad (2.16)$$

представляет собой некоторую прямую. Обозначим её ℓ^*.

Т е о р е м а 2.I. Для прямой ℓ^* левая и правая точки совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если для некоторой прямой

$$\alpha_1x^1+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3=0,\ x^0=0$$

евая и правая точки совпадают, то должно иметь место

$$c^{ij}\alpha_j=\lambda c^{ji}\alpha_j. \quad (2.17)$$

Характеристическое уравнение системы (2.I7)

$$\det\|c^{ij}-\lambda c^{ji}\|=0$$

имеет тройной корень $\lambda=1$. Этому значению λ соответствуют значения

$$\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3=a^{23}:a^{31}:a^{12},$$

т.е. для прямой ℓ^* левая и правая точки совпадают.

Следствие. Полюс прямой ℓ^* относительно кони[ки] K_2 совпадает с правой и левой точкой.

Тензор a_i определяет в плоскости кубики прямую ℓ_1

$$a_i x^i = 0, \quad x^0 = 0, \tag{2.18}$$

которая является аполярной прямой [1] относительно кубики K_3 и коники K_2. Полюсом прямой ℓ_1 относительно коники K_2 будет точка

$$A = a^i A_i, \tag{2.19}$$

определяемая тензором a^i.

§3. Инвариантные точки многообразия $K(0,3,3)^3$.

Продолжим канонизацию репера, положив

$$a_{123} = a \neq -\frac{1}{2}; \quad a_{222} = a_{333} = 1; \quad a_{ijj} = 0 \quad (i \neq j), \tag{3.1}$$

При такой фиксации вершины репера A_i станут вершинами сизигетического треугольника кубики [5]. При этом из рассмотрения исключаются случаи: когда кубика K_3 распадается, или имеет особые точки или кратные точки перегиба. Уравнения кубики K_3 примут вид

$$(x^1)^3 + (x^2)^3 + (x^3)^3 + 6a x^1 x^2 x^3 = 0, \quad x^0 = 0. \tag{3.2}$$

Имеем:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{jk} \omega_k, \quad \omega_0^i = c^{ik} \omega_k,$$

$$\varphi_\rho = \omega_1^1 - \omega_\rho^\rho = b_\rho^k \omega_k, \quad da = \lambda^k \omega_k \tag{3.3}$$

$(i \neq j;\ \rho = 2,3$; по ρ не суммировать!)

[Д]ифференцируя систему (3.3) внешним образом, получаем

$$\Delta \Gamma_i^{jk} \wedge \omega_k = 0, \quad \Delta c^{ik} \wedge \omega_k = 0,$$
$$\Delta b_\rho^k \wedge \omega_k = 0, \quad \Delta \lambda^k \wedge \omega_k = 0, \tag{3.4}$$

где

$$\Delta c^{ik} = dc^{ik} - 2c^{ik}\omega_0^0 + c^{jk}\omega_j^i + c^{ij}\omega_j^k;$$

$$\Delta \Gamma_1^{\rho i} = d\Gamma_1^{\rho i} - \Gamma_1^{\rho i}\omega_0^0 + \Gamma_1^{\rho j}\omega_j^i - c^{\rho i}\omega_1 + \Gamma_1^{\tau i}\omega_\tau^\rho - \Gamma_1^{\rho i}\varphi_\rho;$$

$$\Delta \Gamma_\rho^{1i} = d\Gamma_\rho^{1i} - \Gamma_\rho^{1i}\omega_0^0 + \Gamma_\rho^{1j}\omega_j^i - c^{1i}\omega_\rho + \Gamma_\rho^{1i}\varphi_\rho - \Gamma_\tau^{1i}\omega_\rho^\tau;$$

$$\Delta \Gamma_\rho^{\tau i} = d\Gamma_\rho^{\tau i} - \Gamma_\rho^{\tau i}\omega_0^0 + \Gamma_\rho^{\tau j}\omega_j^i - c^{\tau i}\omega_\rho - \Gamma_\rho^{\tau i}(\varphi_\rho - \varphi_\tau) - \Gamma_1^{\tau i}\omega_\rho^1;$$

$$\Delta b_\rho^i = db_\rho^i - b_\rho^i\omega_0^0 - b_\rho^j\omega_j^i - c^{1i}\omega_1 - 2\Gamma_\rho^{1i}\omega_1^\rho - \tag{3.5}$$
$$- \Gamma_\tau^{1i}\omega_1^\tau + c^{\rho i}\omega_\rho + \Gamma_\tau^{\rho i}\omega_\rho^\tau;$$

$$\Delta \lambda^k = d\lambda^k - \lambda^k\omega_0^0 + \lambda^j\omega_j^k$$

Здесь $\rho, \tau = 2,3$, причем $\rho \neq \tau$ и по ρ, τ суммирование не производится.

Система (3.4) является стандартной системой внешних квадратичных уравнений ([6], стр.108). Она- в инволюции и определяет решение с произволом двенадцати функций трех аргументов.

Рассмотрим кривую H_3, заданную уравнением

$$a^2\{(x^1)^3+(x^2)^3+(x^3)^3\}-(1-2a^3)x^1x^2x^3=0,\ x^0=0 \quad ($$

и являющуюся гессианой [5] кубики K_3. Девять точек пер сечния кривых K_3 и H_3 являются точками перегиба кубики K_3. Нетрудно проверить, что действительными точками пер гиба будут точки

$$P_1=A_2-A_3,\quad P_2=A_1-A_3,\quad P_3=A_1-A_2. \quad (3.$$

Эти точки лежат на прямой ℓ:

$$x^1+x^2+x^3=0,\quad x^0=0, \quad (3.$$

которую назовем прямой перегиба. С помощью точек P_i можно охарактеризовать единичные точки $E_{ij}=A_i+A_j$ ребер репера A_iA_j. Единичная точка $E=A_1+A_2+A_3$ плоскости куби ки является точкой пересечания гармонических поляр [5] то чек перегиба P_i. Поляры точек перегиба P_i относительно коники K_2 пересекаются в точке

$$B=(b^{11}+b^{12}+b^{13})A_1+(b^{21}+b^{22}+b^{23})A_2+(b^{31}+b^{32}+b^{33})$$

являющейся полюсом прямой перегиба ℓ относительно коники K_2. Заметим, что из полярного соответствия относительно K непосредственно следует, что точка B и аполярная прямая ℓ_1 инцидентны тогда и только тогда, когда инцидентны точ-ка A и прямая ℓ.

С помощью введенных выше точек можно охарактеризовать

солютный инвариант многообразия

$$a=DV(E_{ij},A_k,E,Q_{ij})\quad (i\neq j\neq k)$$

есь DV -знак сложного отношения точек, Q_{ij} -точка ресечения прямых, на которые распадается коническая поля- [5] точки перегиба P_k относительно кубики K_3.

Обозначим через ℓ^i касательную к линии $\omega_j=\omega_k=0$, писываемой точкой A_i (i,j,k —различны), а через Π^i_j,Π^i_k плоскости, проходящие через ℓ^i и точки A_j и A_k соответственно. Уравнения этих плоскостей соответственно имеют ид

$$\Gamma^{ki}_i x^0-x^k=0, \quad (3.9)$$

$$\Gamma^{ji}_i x^0-x^j=0. \quad (3.10)$$

Прямая ℓ^i и плоскости Π^k_j и Π^j_k пересекаются в точках M^{ik}_j и M^{ij}_k, где

$$M^{ik}_j=A_0+\Gamma^{ik}_k A_i+\Gamma^{ji}_i A_j+\Gamma^{ki}_i A_k, \quad (3.11)$$

$$M^{ij}_k=A_0+\Gamma^{ij}_j A_i+\Gamma^{ji}_i A_j+\Gamma^{ki}_i A_k. \quad (3.12)$$

В общем случае точки M^{ik}_j и M^{ij}_k не совпадают. Через точки M^{ik}_j проходят 15 прямых, причем, прямые $(M^{ik}_j M^{ij}_k)$ совпадают с ℓ^i, прямые $(M^{jk}_i M^{kj}_i)$ пересекают плоскость кубики в точке A_i, прямые $(M^{kj}_i M^{ji}_k)$ и $(M^{ij}_k M^{ki}_j)$ пересекают плоскость кубики в точке S_i, лежащей на ребре репера A_iA_j,

$$S_i = (\Gamma^{ik}_k - \Gamma^{ij}_j)A_i - (\Gamma^{jk}_k - \Gamma^{ji}_i)A_j ,$$

все точки S_i лежат на одной прямой.

§4. Некоторые классы многообразий $K(0,3,3)^3$.

Рассмотрим класс, характеризующийся тем, что в нем точ M^{ik}_j совпадает с точкой A_0 (i -фиксированно, $j<k$). Аналитически этот класс характеризуется соотношениями

$$\Gamma^{ki}_i = \Gamma^{ik}_k = \Gamma^{ji}_i = 0 \qquad (4.$$

и обладает следующими свойствами. 1/Плоскость Π^i_j совпад с плоскостью $A_0A_iA_j$, плоскость Π^k_j -с плоскостью $A_0A_kA_j$, плоскость Π^i_k -с плоскостью $A_0A_iA_k$. 2/Точка M^{ji}_k инцидентна плоскости $A_0A_jA_k$, точка M^{k}_0 плоскости $A_0A_kA_j$, точка M^{ki}_j -прямой A_0A_k, точк M^{ij}_k прямой A_0A_i. 3/Пусть K_1,K_2 и K'_1,K'_2 —квазифле нодальные точки" [2] пары линейчатых поверхностей $\omega_i=\omega_j=0$ описываемых прямыми A_0A_i и A_jA_k соответственно. Тогда имеет место равенство

$$DV(K_1K_2A_0A_i) = DV(K'_1K'_2A_jA_k) \qquad ($$

Докажем свойство 3/ Пусть $K_\xi = A_0+\tau A_i$, $K'_\xi = A_j+tA_k$, ξ где t и τ определяются с помощью уравнений

$$t^2(c^{jk}+\Gamma^{ik}_k\Gamma^{jk}_i)+t(\Gamma^{ik}_j\Gamma^{jk}_i-\Gamma^{ik}_k\Gamma^{kk}_i-c^{kk})-\Gamma^{jk}_i\Gamma^{kk}_i=0, \qquad (4$$

$$\tau^2\Gamma^{kk}_i+\tau(c^{kk}-\Gamma^{jk}_i\Gamma^{ik}_j-\Gamma^{kk}_i\Gamma^{ik}_k)-(\Gamma^{ik}_j c^{jk}+\Gamma^{ik}_k c^{kk})=0$$

ли выполняется (4.1), то уравнения (4.3) принимают вид

$$t^2 c^{jk} + t(\Gamma^{ik}_j\Gamma^{jk}_i - c^{kk}) - \Gamma^{ik}_j\Gamma^{kk}_i = 0,$$

$$\tau^2\Gamma^{kk}_i + \tau(c^{kk} - \Gamma^{ik}_j\Gamma^{jk}_i) - \Gamma^{ik}_j c^{jk} = 0. \qquad (4.4)$$

числив корни этих уравнений и найдя их отношения, получим

$$t_1 : t_2 = \tau_2 : \tau_1$$

сюда и вытекает справедливость этого свойства.

Класс многообразия $K(0,3,3)^3$ характеризующийся тем, о точки M^{ij}_k и M^{ik}_j совпадают, выделяется соотношениями

$$\Gamma^{ik}_k = \Gamma^{ij}_j \qquad (i\text{ -фиксировано}) \qquad (4.5)$$

обладает свойствами.

1.Все остальные точки M^{lm}_n лежат в одной плоскости. ействительно, определитель, составленный из координат этих точек, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \Gamma^{ij}_j & \Gamma^{jk}_k & \Gamma^{kj}_j \\ 1 & \Gamma^{ij}_j & \Gamma^{ji}_i & \Gamma^{kj}_j \\ 1 & \Gamma^{ik}_k & \Gamma^{jk}_k & \Gamma^{kj}_j \\ 1 & \Gamma^{ik}_k & \Gamma^{jk}_k & \Gamma^{ki}_i \end{vmatrix}$$

и в силу (5.5) равен нулю,что равносильно инцидентнос этих точек одной плоскости.

2.Касательные к линиям $\omega_i = \omega_j = 0$; $\omega_i = \omega_k = 0$, описыва точками A_k и A_j соответственно пересекаются.Доказа ство сводится к простым вычислениям.

Рассмотрим такой класс многообразия $K(0,3,3)^3$ у рого тензор c^{ij} симметричен,т.е.

$$c^{ij} = c^{ji}$$ (

Геометрически этот класс характеризуется тем,что для л прямой $\ell \in A_1A_2A_3$ её левая и правая точки совпада

Для этого класса справедливы свойства.

I/ Плоскость,содержащая касательные к линиям,описыва мым точкой A_0 вдоль всех ψ_1 ,определяемых уравнение $\omega_i = 0$,пересекает плоскость кубики по прямой,являю щейся полярой точки A_i относительно коники K_2 .Дейст тельно,т.к. в силу (4.6) $c^{ij} = b^{ij}$,то эта плоскость имеет уравнение

$$b_{i1}x^1 + b_{i2}x^2 + b_{i3}x^3 = 0 .$$

Очевидно,что пересечение этой плоскости с плоскостью ку ки и является полярой точки A_i относительно коники K_2

2/Точка пересечения с плоскостью кубики касательной линии $\omega_i = \omega_j = 0$, описываемой точкой A_0 ,совпадает с точкой пересечения поляр точек A_i и A_j относительно коники K_2 .

вдоль ψ_1 ,соответствующего прямой ℓ_1 ,точка A_0 опи ет линию с касательной A_0A .

одставляя в (3.5) аналитические условия,выделяющие ый из рассмотренных классов многообразий $K(0,3,3)^3$, учим,что все они существуют и определяются с произволом ти,одиннадцати и девяти функций трех аргументов соот ственно.

Литература

I.Ивлев Е.Т.,К геометрической интерпретации операции ертывания некоторых тензоров.Материалы итоговой научной нференции по матем.и мех.за 1970г.,I,Томск,1970,I2I-I23.

2.Ивлев Е.Т.,О паре линейчатых поверхностей в трехмер проективном пространстве.Геом.сб.2.,Тр.Томского ун-та, 5I,1962,3-I0.

3.Лаптев Г.Ф.,Дифференциальная геометрия погруженных ногообразий.Тр.Моск.матем.об-ва,2,1953,275-385.

4.Малаховский В.С.,К геометрии касательно оснащенных ногообразий.Изв.вузов,Математика,9,I72 1972,54-65.

5.Смогоржевский А.С.,Столова Е.С.,Справочник по теории лоских кривых третьего порядка,М.,196I.

6.Щербаков Р.Н.,Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.Томск,197I.